数理解析研究所講究録
22 巻 1967 年 34-44

二階楕円型偏微分作用素の分数巾の定義域について

東大 理、 藤原大輔

§1. 序

ΩをR^mの有界領域で、その境界Sが$m-1$次元C^∞多様体であるものとする。S上で境界条件

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + (1-\alpha) u = 0$$

を考える。但し、nはSの単位法線(外)，αはS上で与えられた滑らかな函数で、$0 \leq \alpha \leq 1$をみたすものとする。A_αとして、$-\Delta$をこの条件下で考えた$L^2(\Omega)$での自己共役作用素とすると，A_αの分数巾A_α^θ $0 \leq \theta \leq 1$は，A_αのスペクトル表示を　$A_\alpha = \int_0^\infty \lambda \, dE_\alpha(\lambda)$　とすると，

$$A_\alpha^\theta = \int_0^\infty \lambda^\theta \, dE_\alpha(\lambda)$$

で与えられる。

ここで考える問題は，函数$u \in L^2(\Omega)$がA_α^θの定義にはいるための必要十分条件をもとめることである。

注意

1° ここで、A_αとしては，

$$\mathcal{D}_\alpha = \{ u \in H^2(\Omega) ; \ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + (1-\alpha) u |_S = 0 \}$$

を定義とする maximal accretive operator (c.f. T. Kato [1]) ならば，何でも良い。$-\Delta$ と限ったのは簡単のためである。
(c.f. J. L. Lions [2])

2° S や α の滑らかさは緩められる。

§2. 結果

x から S 迄の Euclid 距離を $\delta(x)$ とおく。次のような関数空間を考える。

$$E^{0,s}(\Omega)=\{u\in H^{s}(\Omega)\mid \int_{\Omega}\delta(x)^{-2s}|u(x)|^{2}dx<\infty\},\quad 0<s<1$$

$$E^{1,s}(\Omega)=\{u\in H^{1+s}_{\gamma_0}(\Omega)\mid \sum_{j=1}^{m-1}\int_{\Omega}\delta(x)^{-2s}|D_j u(x)|^{2}dx<\infty\},$$

$$H^{s}_{\gamma_0}(\Omega)=\{u\in H^{s}(\Omega)\mid u|_{S}=0\},\quad s>\tfrac{1}{2}.$$

但し，$H^{s}(\Omega)$ は s 次ソボレフ空間であって，$D_j, j=1,2,\dots,m-1$ は，S と平行な $m-1$ 個の一次独立な一階偏微分作用素とする。

定理 1

α が S 上恒等的に 0 であれば，作用素 A_0 の分数巾の定義域 $D(A_0^{\theta})$，$0<\theta<1$ は

(a) $D(A_0^{\theta}) = E^{0,2\theta}(\Omega) = H^{2\theta}(\Omega)$，$0<\theta<\frac{1}{4}$，

(b) $D(A_0^{\frac{1}{4}}) = E^{0,\frac{1}{2}}(\Omega) \subsetneq H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$

(c) $D(A_0^{\theta}) = E^{0,2\theta}(\Omega) = H^{2\theta}_{\gamma_0}(\Omega)$，$\frac{1}{4}<\theta<\frac{1}{2}$

(d) $D(A_0^{\frac{1}{2}}) = \quad = H^{1}_{\gamma_0}(\Omega)$

(e) $D(A_0^\theta) = E^{1,2\theta-1}(\Omega) = H^{2\theta}_{\gamma_0}(\Omega)$, $\frac{1}{2}<\theta<\frac{3}{4}$,

(f) $D(A_0^{\frac{3}{4}}) = E^{1,\frac{1}{2}}(\Omega) \subsetneq H^{\frac{3}{2}}_{\gamma_0}(\Omega)$,

(g) $D(A_0^\theta) = E^{1,2\theta-1}(\Omega) = H^{2\theta}_{\gamma_0}(\Omega)$, $\frac{3}{4}<\theta<1$.

で与えられる。

次に，関数空間

$$M_\alpha^{1+s}(\Omega) = \{u \in H^{1+s}(\Omega) \mid \int_\Omega \delta(x)^{-2s}\left|\alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} + (1-\alpha)u\right|^2 dx < \infty\}$$

$$H^s_{(\alpha)}(\Omega) = \{u \in H^s(\Omega) \mid \alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} + (1-\alpha)u|_\Gamma = 0\}, \quad s>\frac{3}{2},$$

を導入する。但し，α は $\overline{\Omega}$ に滑らかに拡張されているものとする。

定理 2

α が Γ 上で決して 0 にならぬとき，A_α の分数巾の定義域 $D(A_\alpha^\theta)$ は，

(a) $D(A_\alpha^\theta) = H^{2\theta}(\Omega)$, $0<\theta<\frac{3}{4}$,

(b) $D(A_\alpha^{\frac{3}{4}}) = M^{\frac{3}{2}}_{(\alpha)}(\Omega) \subseteq H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$,

(c) $D(A_\alpha^\theta) = M^{2\theta}_{(\alpha)}(\Omega) = H^{2\theta}_{(\alpha)}(\Omega)$, $\frac{3}{4}<\theta<1$.

で与えられる。

次の局所化に関する定理を使うと，Ω の境界が幾つかの連結成分に分かれていて，α が 0 になる所と，0 でない所とが分離していれば，A_α^θ の定義域を定めることは出来る。

定理 3

関数 u が、A_α の分数巾 の定義域 $D(A_\alpha^\alpha)$ に入るための必要十分条件は、任意の $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ の関数で、$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\big|_S = 0$ をみたすものに対し、$\varphi\cdot u$ が再び $D(A_\alpha^\alpha)$ に入ることである。

§ 3. 証明の概略

はじめに、補間空間の理論を 2-3 の事実について復習しておく。
(J. L. Lions. [3])

定義

X_0, X_1 を二つの Banach 空間で、$X_0 \subset X_1$ とする。埋蔵作用素は連続とする。$1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \alpha = \theta$. $\theta \in [0, 1)$ なるよう、α をとっておく。X_1 に値をもつ $(0, \infty)$ での強可測関数 $u(t)$ で、$\|u\|^p_{W(X_0, X_1, p, \theta)} = \max\left(\int_0^\infty \|t^\alpha u\|^p dx ;\ \int_0^\infty t^{\alpha p}\|u'\|^p_{X_1} dt\right)$ が有界なもの全体を $W(X_0 . X_1 ; p . \theta)$ とおく。ここで $u'(t)$ とは、t に関する超関数微分。$W(X_0 . X_1 : p . \theta)$ は $\| \quad \|_{W(X_0 X_1 : p . \theta)}$ をノルムとして、Banach 空間である。

$$T(X_0 : X_1 ; p . \theta) = \{u(0) ;\ u \in W(X_0, X_1 : p . \theta)\}$$

を Trace 空間という。$W(X_0 . X_1 : p ; \theta)$ の商空間として、自然に Banach 空間である。

我々の使う性質は、

定理A(補間定理)

Y_0, Y_1 を二つの Banach 空間, $Y_0 \subset Y_1$ とする。(埋蔵

作用素は連続とする)。πを、$X_p \longrightarrow Y_p$ の線形連続写像で、これをX_0に制限すると $X_0 \longrightarrow Y_0$ 連続写像になるものとする。このとき πは

$$\pi : T(X_0, X_1; p, \theta) \longrightarrow T(Y_0, Y_1; p, \theta)$$

の写像として線型連続。

定理 B. (c.f. J.L. Lions [2])

$\mathcal{H}$をヒルベルト空間、Aを、$\mathcal{H}$の稠密な線型集合 $D(A)$ で定義された、maximum accretive operator とすると、

$$D(A^\theta) = T(D(A), \mathcal{H}; 2, 1-\theta).$$

定理 C

Ωを滑らかな境界をもつ、R^mの領域とすると、

$$T(H^{s_0}(\Omega), H^{s_1}(\Omega); 2, 1-\theta) = H^{s_0\theta+(1-\theta)s_1}(\Omega), \quad s_0>s_1$$

定理 1 の証明も同様だから、簡単な定理 2 を証明しよう。更に、簡単のために $\Omega = R^m_+ = \{x=(x', x_m) \mid x' \in R^{m-1}, x_m>0\}$ の場合に示すことにする。

$L^2(R^m)$ は、x_mに関し、偶関数の全体 F^0 と、奇関数の全体 G^0 とに直和分解される。射影作用素を、

$P : L^2(R^m) \longrightarrow F^0$, $\quad Q : L^2(R^m) \longrightarrow G^0$ とする。

埋蔵作用素を、$R : F^0$ (又は G^0) $\longrightarrow L^2(R^m)$ とおく。

これらすべては、線型連続で、$P \circ R = id$、$Q \circ R = id$ で

ある。 $2 \geq s \geq 0$ に対して

$$F^s = H^s(\mathbb{R}^m) \cap F^0, \qquad G^s = H^s(\mathbb{R}^m) \cap G^0.$$

とおく。 P を $H^2(\mathbb{R}^m)$ に制限すれば、

$$P : H^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow F^2 . \quad \text{lin. cont.}$$

よって 定理 A によって、

$$P : T(H^2(\mathbb{R}^m), L^2(\mathbb{R}^m) ; 2, 1-\theta) \xrightarrow{\text{cont}} T(F^2, F^0 ; 2, 1-\theta)$$

定理 C によって

$$P : H^{2\theta}(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\text{cont.}} T(F^2, F^0 : 2, 1-\theta)$$

同様にして、

$$R : T(F^2, F^0 ; 2, 1-\theta) \longrightarrow H^{2\theta}(\mathbb{R}^m) \quad \text{cont. lin.}$$

で $\qquad P \circ R = id.$

従って

(1) $\qquad T(F^2, F^0 : 2, 1-\theta) = F^{2\theta}$

さて、$L^2(\mathbb{R}^m_+)$ の関数を、x_m につき偶関数となるよう $\mathbb{R}^m$ 全体に延長すると $L^2(\mathbb{R}^m)$ に入る。この対応を λ とおく。また、$L^2(\mathbb{R}^m)$ を $\mathbb{R}^m_+$ に制限する作用素を π とおくと、

$$\pi : F^0 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m_+) \quad \text{cont. lin. で、}$$

π を F^2 に制限すると、

$$\pi : F^2 \longrightarrow D(A_1) \quad \text{cont. lin.}$$

しかも、 $\qquad \pi \circ \lambda = id. \qquad \lambda \circ \pi = id.$

すなわち、λ と π は F^0 と $L^2(\mathbb{R}^m_+)$、 F^2 と $D(A_1)$ の間の isomorphisms を与える。よって定理 A, B と (1) を使うと、

(2) $$D(A_1^\theta) \underset{\pi}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} F^{2\theta} \quad \text{isomorphism}.$$
となる。

$F^{2\theta}$ の norm は具体的に積分を使って書けるから，$D(A_1^\theta)$ が (2) によって，具体的に定まるのである。

実際に $\|\lambda u\|^2_{F^{2\theta}}$ を計算しよう。

(a'). $\quad 0<\theta<\frac{1}{2}$, i.e. $0<2\theta<1$ のとき，

$$\|\lambda u\|^2_{F^{2\theta}} = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\lambda u(x)-\lambda u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}}dxdy + \|\lambda u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)}$$

$$= 2\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} + 2\iint_{\mathbb{R}^m_+\mathbb{R}^m_+} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}}dx\,dy + 2\int_{\mathbb{R}^m_+}\int_{\mathbb{R}^m_-} \frac{|\lambda u(x)-\lambda u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}}dx.dy.$$

第三項において，$y_m \longrightarrow -y_m$ と変数変換すると，λu が x_m について偶関数のことから，

$$\text{第三項} = 2\iint_{\mathbb{R}^m_+\mathbb{R}^m_+} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{\left(|x'-y'|^2+|x_m+y_m|^2\right)^{\frac{m+4\theta}{2}}}dxdy$$

(3)
$$\leqq 2\iint_{\mathbb{R}^m_+\mathbb{R}^m_+} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}}dxdy$$

従って，u の quadratic forms が同値のことを $\sim$ とかくと，

$$\|u\|^2_{D(A^\theta)} \sim \|\lambda u\|^2_{H^{2\theta}} \sim \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m_+)} + \iint_{\mathbb{R}^m_+\mathbb{R}^m_+} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}}dxdy = \|u\|^2_{H^{2\theta}(\mathbb{R}^m_+)}$$

(b′) $\theta = \frac{1}{2}$,

$$\|\lambda u\|_{F^1}^2 = \|\lambda u\|_{L^2(R^m)}^2 + \sum_{j=1}^m \|D_j \lambda u\|^2 \quad , \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

$$= 2(\|u\|_{L^2(R^m_+)}^2 + \sum_{j=1}^m \|D_j u\|_{L^2(R^m_+)}^2)$$

$$= 2\|u\|_{H^1(R^m_+)}$$

(c′). $\frac{1}{2} < \theta < 1$. $1 < 2\theta < 2$.

$$\|\lambda u\|_{F^{2\theta}}^2 = \|\lambda u\|_{H^1(R^m)}^2 + \sum_{j=1}^m \iint_{R^m_+ R^m_+} \frac{|D_j \lambda u(x) - D_j \lambda u(y)|^2}{|x-y|^{m+2\theta_1}} dx dy$$

但しここで, $\theta_1 = 2\theta - 1$ とおいた。

よって

$$\|\lambda u\|_{F^{2\theta}}^2 = 2\|u\|_{H^1(R^m_+)}^2 + 2\sum_{j=1}^m \iint_{R^m_+ R^m_+} \frac{|D_j u(x) - D_j u(y)|^2}{|x-y|^{m+2\theta_1}} dx dy$$

$$+ 2\sum_{j=1}^m \iint_{R^m_+ R^m_-} \frac{|D_j u(x) - D_j u(y)|^2}{|x-y|^{m+2\theta_1}} dx dy$$

$j = 1, 2, \cdots, m-1$ の場合, $D_j \lambda u$ は x_m に関し偶関数故. (3) と同様な評価が出来る。$j=m$ については,

(7) $$\begin{cases} I_s^2(v) = \displaystyle\iint_{R^m_+ R^m_+} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{m+2s}} dx dy. \\ J_s^2(v) = \displaystyle\iint_{R^m_+ R^m_+} \frac{|v(x) + v(y)|^2}{(|x'-y'|^2 + |x_m + y_m|^2)^{(m+2s)/2}} dx dy \\ K_s^2(v) = \displaystyle\int_{R^m_+} |x_m|^{-2s} |v(x)|^2 dx. \end{cases}$$

なる二次形式の間に、

$$(8) , \quad 4\kappa_s^2 K_s^2(v) = I_s^2(v) + J_s^2(v) \leq I_s^2(v) + 2\kappa_s^2 K_s^2(v)$$

但し、 $\kappa_s^2 = \int_0^\infty t^{-2s-1} \int \frac{dx'}{(|x'|^2+1)^{(m+2s)}}$

なる関係が成立するから、 $D_m \lambda u$ が x_m につき奇関数のことを使うと、

$$\iint_{R_+^m R_-^m} \frac{|D_m\lambda u(x) - D_m\lambda u(y)|^2}{|x-y|^{m+2\theta_1}} dx\, dy = J_{\theta_1}^2(D_m v).$$

によって、(8) から

$$\|\lambda u\|_{H^{2\theta}}^2 \sim \|u\|_{H^1(R_+^m)}^2 + \sum_{j=1}^{m} I_{\theta_1}^2(D_j u) + K_{\theta_1}^2(D_m u).$$

$$\sim \|u\|_{H^{2\theta}(R_+^m)}^2 + K_{2\theta-1}^2(D_m u)$$

すなわち、(2) から

$$(9) \quad \|u\|_{D(A_1^\theta)}^2 \sim \|u\|_{H^{2\theta}(R_+^m)}^2 + K_{2\theta-1}^2(D_m u)$$

次の定理は、J. L. Lions. and E. Magenes [4] による。

<u>定理 D</u>

(i). $u \in H^\theta(R_+^m)$, $0<\theta<\frac{1}{2}$, ならば、ある定数 $C>0$ があり、

$$K_\theta^2(u) \leq C\left(I_\theta^2(u) + \|u\|_{L^2(R_+^m)}^2 \right) = C\|u\|_{H^\theta(R_+^m)}^2$$

(ii) $u \in H_{\gamma_0}^\theta(R_+^m)$, $\frac{1}{2}<\theta<1$ ならば、ある定数 $C>0$ があって、

$$K_\theta^2(u) \leq C\left(I_\theta^2(u) + \|u\|_{L^2(R_+^m)}^2 \right) = C\|u\|_{H^\theta(R_+^m)}^2.$$

(9) とこの定理 D を使えば、定理 2 は、$\alpha \equiv 1$ のときに、証明された。

$\alpha \neq 0$ のとき定理2を証明するには次の技巧による。

$f(t)$ を R^1 上 C^∞ 関数で、$\frac{1}{3} \leq f(t) \leq 3$ で、$t=1$ の近傍で t に等しいものとする。写像

$$\gamma: L^2(R^m_+) \longrightarrow L^2(R^m_+)$$
$$u \longmapsto \gamma u(x) = f(e^{\frac{1-\alpha(x')}{\alpha(x')}x_m})\, u(x).$$

は連続線型で、isomorphism で、同時に、

$$\gamma: D(A_\alpha) \longrightarrow D(A_1)$$

も isomorphism である。だから再び定理A. B を使って、

$$\gamma: D(A_\alpha^\theta) \xrightarrow{\text{isom.}} D(A_1^\theta), \quad 0<\theta<1,$$

を得る。従って、定理2は完全に証明出来る。

<u>定理3の証明.</u>

自明でないのは、$u \in D(A_\alpha^\theta)$ のとき $\varphi u \in D(A_\alpha^\theta)$ のことである。

$$\delta: \quad u \longrightarrow \varphi u.$$

とおくと、$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = 0$ 故、δ は $L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ cont. であると同時に、$D(A_\alpha) \longrightarrow D(A_\alpha)$, cont. 従ってまたもや定理A, B により、$\delta: D(A_\alpha^\theta) \longrightarrow D(A_\alpha^\theta)$ cont lin.

以上で、定理3も証明される。

Ω が一般の領域のときは、その証明は省くが、以上の証明と、本質的には同じことをやれば良い。γ の定義には一寸した工夫が必要であるが、その説明は　長くなるから省く。詳細はいずれ発表する予定である。

文献.

[1] T. Kato, Fractional powers of dissipative operators.
J. Math. Soc. Japan 13 (1961) 246-274.
[2] J. L. Lions, Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs.
J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 233-241.
[3] J. L. Lions Sur les espaces d'interpolation dualité
Math. Scand IX. (1961) p 147-177.
[4] J. L. Lions et E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes (IV).
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. 15 (1961) 311-326